数理解析研究所講究録
1077巻 1999年 88-104

amenable tensor categoryのAFD-bimoduleによる実現について

東北大数 林 倫弘 (Tomohiro Hayashi)

§0. Introduction

我々がここで扱う"tensor category"とは 左右からII_1-factorが作用するbimoduleをobjectとするcategory のことです。 このようなcategoryはsubfactor の不変量として現れ 特にある種のsubfactor(amenable subfactor) に対しては 完全な不変量となることが 近年S. Popa により示されています。(正確にいうとPopaが示したのは standard invariant (paragroup, standard lattice) が 完全不変量となることです。 bimoduleのなす tensor category は standard invariant の情報を全て含む不変量なので 当然完全不変量となります。)

一方 逆に abstract な standard invariant が与えられた時、それを実現するsubfactorが存在するか? という点が問題になります。 この点についても Popa は解答を与え

ています。Popa は[P2]において"あらゆる standard lattice はある(必ずしも AFD ではない) subfactor で実現可能である"ということを示しました。また standard lattice が amenable な時は AFD II_1-factor で実現ができるということをアナウンスしています。我々の目標はこの問題の"tensor category 版"に解答を与えることです。基本となるアイデアは A. Ocneanu による surface bimodule construction です。(なお本ノートの内容は参考文献[HY], [H] のものです。)

§1. non-graded tensor category の実現

NをII_1-factor、$\mathcal{C}$を index 有限のN-N bimodule からなる category とします。さらに$\mathcal{C}$は (i) relative tensor product (ii) unitary equivalence (iii) 既約分解 (iv) conjugation について閉じているとします。さらに$\mathcal{C}$に属する既約な bimodule の unitary equivalence class 全体をSとおき Sが高々可算集合であることも仮定します。(しばしば Sの元と既約な bimodule を同一視します。)

記号 ${}_NX\otimes_N Y_N$を単にXYと書く。また $I\equiv {}_NL^2(N)_N$

$\overline{X}$ は X の conjugate bimodule とする。 $\mathrm{Hom}({}_N X_N, {}_N Y_N)$ を $\mathrm{Hom}(X, Y)$ と略記する。

Proposition 1.1 (Frobenius duals)

各 $X \in \mathrm{Object}(\mathcal{C})$ (i.e., X は $\mathcal{C}$ に属する N−N bimodule) に対し $\varepsilon_X \in \mathrm{Hom}(X\overline{X}, I)$ が対応し次を満たす。

(i) $\varepsilon_{XY} = \varepsilon_X \circ (I_X \otimes \varepsilon_Y \otimes I_{\overline{X}})$

(ii) ${}^\forall f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ に対し

$$\varepsilon_X \circ (I_X \otimes {}^t f) = \varepsilon_Y \circ (f \otimes I_{\overline{Y}})$$

ただし ${}^t f = (\overline{f})^* \in \mathrm{Hom}(\overline{Y}, \overline{X})$

(iii) ${}^\forall f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ に対し

$$\varepsilon_X \circ (f \otimes I_{\overline{Y}}) = 0 \implies f = 0$$

(iv) ${}^\forall f \in \mathrm{End}(X)$ に対し

$$\varepsilon_X \circ (f \otimes I_{\overline{X}}) \circ \varepsilon_X^* = \varepsilon_{\overline{X}} \circ (I_{\overline{X}} \otimes f) \circ \varepsilon_{\overline{X}}^*$$

Remark　X の bounded vector 全体を X^{bdd} で表わし、left N-valued inner product を $[\xi, \eta]_N$ $(\xi, \eta \in X^{bdd})$ と書くことにする。 また $\{f_j\}_j$ を $\mathrm{End}(X)$ の minimal projection による I の分解とする。 すると ε_X は

$$\varepsilon_X(\xi \otimes \overline{\eta}) = \sum_j \left(\frac{\dim_N(f_j X)}{\dim(f_j X)_N}\right)^{\frac{1}{4}} [f_j \xi, f_j \eta]_N \, \tau_N^{\frac{1}{2}}$$

($\tau_N^{\frac{1}{2}}$ は $L^2(N)$ における N の unit に対応するベクトル)

により与えられる。

Definition 1.2 (minimal traces)
linear functional

$$\mathrm{End}(X) \ni f \longmapsto \langle f \rangle_X \in \mathbb{C}$$

を $\langle f \rangle_X = \varepsilon_X \circ (f \otimes I_{\bar{X}}) \circ \varepsilon_X^* \in \mathrm{End}(I) = \mathbb{C}$

で定める。これを minimal trace と呼ぶ

実際、次の補題により trace になります。

Lemma 1.3 $^\forall f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ $^\forall g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ に対し

$$\langle fg \rangle_Y = \langle gf \rangle_X$$

Definition 1.4 (quantum dimensions)
$d(X) \equiv \langle I_X \rangle_X$ $(= \varepsilon_X \varepsilon_X^*)$ とおき これを quantum dimension と呼ぶ。

Lemma 1.5 (i) $d(X \oplus Y) = d(X) + d(Y)$
(ii) $d(XY) = d(X)d(Y)$ (iii) $d(X) = d(\bar{X})$

Remark 上の (i)～(iii) は Frobenius dual の性質のみから

証明される。一方 $d(X)$ は X の minimal index の square rootに一致している。

S を基底とする free module $\mathbb{C}[S]$ はよく知られているように relative tensor productで積を定義することで fusion algebra になります。([HI] 参照) また quantum dimension は $\mathbb{C}[S]$ 上の dimensionを定めます。

<u>Definition 1.6</u> (amenability of fusion algebra)

$\mathbb{C}[S]$ が <u>amenable</u> であるとは 次を満たすこととする。

$\forall a = \sum_{s \in S} a(s) s$ $(a(s) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a(s)$ は有限個を除き $0)$

に対し $d(a) = \| L_a : \ell^2(S) \to \ell^2(S) \|$.

ただし $L_a = \{L_a(s,t)\}_{s,t \in S}$ は

$$L_a(s,t) = \sum_{u \in S} a(u) \dim \mathrm{Hom}(us, t)$$

で与えられる。またこのとき、$\mathcal{C}$ も amenableであるという。

<u>Definition 1.7</u>

(i) $s, t, u \in S$ に対し $N_{s,t}^u = \dim \mathrm{Hom}(st, u)$

と書く。S 上の probability measure μ, ν に対し

$$\mu * \nu(u) \equiv \sum_{s,t \in S} \mu(s) \nu(t) N_{s,t}^u \frac{d(u)}{d(s)d(t)}$$

により S 上の probability measure $\mu * \nu$ を定める。

(ii) μ が <u>symmetric</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mu(s)=\mu(\bar{s})$ $\forall s\in S$

(iii) $f\in \ell^\infty(S)$ が <u>μ-harmonic</u>

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(s)=\sum_{t\in S}\mu*\delta_s(t)f(t)$ $\forall s\in S$

(iv) μ が <u>ergodic</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ μ-harmonic function が constant のみ。

次の定理が bimodule の construction における1つの Key となります。

<u>Theorem 1.8</u>

$\mathbb{C}[S]$ が amenable

$\Longrightarrow$ $\exists\mu$: a symmetric, ergodic probability measure on S s.t. support$(\mu)=S$

以下 $\mathbb{C}[S]$ が amenable であると仮定し Thm 1.8 により μ を1つとって固定します。また、

R : an AFD II_1-factor with a unique tracial state τ.

$\{e_s\}_{s\in S}$: an orthogonal family of projections in R s.t. $\tau(e_s)=\frac{\mu(s)}{d(s)}$

$x=(x_n,\cdots,x_1)\in S^n=S\times\cdots\times S$ (n-times) に対し

$e_x\equiv e_{x_n}\otimes\cdots\otimes e_{x_1}\in R^{\otimes n}$, ${}_xR_y\equiv e_x(R^{\otimes n})e_y$

とします。

Definition 1.9

$X \in Object(\mathcal{C})$ に対し

$$A_0(X) \equiv End(X)$$

$$A_n(X) \equiv \bigoplus_{x, y \in S^n} Hom(y_n \cdots y_1 X,\ x_n \cdots x_1 X) \otimes {}_xR_y$$

また $s \in S$ に対し

$$A_n^s(X) \equiv \bigoplus_{x, y \in S^n} Hom(y_n \cdots y_1 X,\ s) \otimes Hom(s,\ x_n \cdots x_1 X) \otimes {}_xR_y$$

とおく。特に $A_n \equiv A_n(I)$ と書く。

Lemma 1.10

(i) $A_n^s(X) \simeq R$ (ii) $A_n(X) \simeq \bigoplus_{s \in S} A_n^s(X)$

Definition 1.11

- $A_n(X) \ni f \otimes a \mapsto \bigoplus_{s \in S} (I_s \otimes f) \otimes (e_s \otimes a) \in A_{n+1}(X)$
- $A_n(X) \ni f \otimes a \mapsto (f \otimes I_Y) \otimes a \in A_n(XY)$

により埋め込みを定める。ただし

$$f \in Hom(y_n \cdots y_1 X,\ x_n \cdots x_1 X), \quad a \in {}_xR_y$$

Definition 1.12

$A_n(X)$ 上の Tracial state τ_X を

$$\tau_X(I_{A_n^s(X)}) = \mu^n * \delta_X(s)$$

（ただし $\delta_X \equiv \sum_{s \in S} \dim \mathrm{Hom}(X, s) \frac{d(s)}{d(X)} \delta_s$ ）

で定める。Lem 1.10 により これは trace を定める。

<u>Remark</u> τ_X は minimal trace と R上の trace τ により

$$\tau_X(f \otimes a) = \delta_{x,f} \langle f \rangle_{x_n \cdots x_1 X} \cdot \tau(a) \cdot \frac{1}{d(X)}$$

と書くことができる。

<u>Lemma 1.13</u> Def 1.11 の2つの埋め込みと Def 1.12 の trace の定義は compatible

$\bigcup_n A_n(X)$ の τ_X による GNS-表現でうつしたものの weak closure を $A_\infty(X)$ で表わす。

<u>Lemma 1.14</u> $X \in \mathrm{Object}(\mathcal{C})$ に対し vN-algebra $A_\infty(X)$ を考える。各 $x \in Z(A_\infty(X))$ （$A_\infty(X)$ の中心）に対し一意に μ-harmonic function f が存在して

$$E_{A_n(X)}(x) = \sum_{s \in S} f(s) I_{A_n^s(X)}$$

を満たす。ここで $E_{A_n(X)}$ は $A_\infty(X)$ から $A_n(X)$ への τ_X-preserving conditional expectation である。したがって μ の ergodicity より $A_\infty(X)$ は AFD II_1-factor となる。

<u>Definition 1.15</u>　$X \in \mathrm{Object}(\mathcal{C})$ に対し

$$X_n \equiv \bigoplus_{x,y \in S^n} \mathrm{Hom}(y_n \cdots y_1, x_n \cdots x_1 X) \otimes {}_xR_y$$

とおく。そして X_n 上の内積を

$$(f \otimes a \mid g \otimes b) \equiv \delta_{x,w}\, \delta_{y,z} \langle g^* f \rangle_{x_n \cdots x_1 X}\, \tau(b^* a)$$

で定める。ここで

$f \in \mathrm{Hom}(y_n \cdots y_1, x_n \cdots x_1 X)$　　$a \in {}_xR_y$

$g \in \mathrm{Hom}(z_n \cdots z_1, w_n \cdots w_1 X)$　　$b \in {}_zR_w$

さらに X_n から X_{n+1} への埋め込みを Def 1.11 と同様に定める。

<u>Lemma 1.16</u>

(i) X_n は自然に $A_n - A_n$ bimodule の構造を持つ。

(ii) X_n から X_{n+1} への埋め込みは内積を保つ。また左右の A_n, A_{n+1} の作用と compatible になる。

したがって完備化により $A_\infty - A_\infty$ bimodule X_∞ が得られます。対応 $X \mapsto X_\infty$ は tensor category としての同型写像となりますが ここで以下の主張を述べるのみとします。(くわしくは [HY] 参照)

<u>Theorem 1.17</u>　(i) $(X \oplus Y)_\infty \simeq X_\infty \oplus Y_\infty$

(ii) $X_\infty Y_\infty \simeq (XY)_\infty$ (iii) $(\overline{X})_\infty \simeq \overline{X_\infty}$

(iv) $d(X) = d(X_\infty)$

(v)
$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{End}(X) & \subset & \mathrm{End}(XY) & & \mathrm{End}(X_\infty) & \subset & \mathrm{End}((XY)_\infty) \\ \cap & & \cap & \simeq & \cap & & \cap \\ \mathrm{End}(ZX) & \subset & \mathrm{End}(ZXY) & & \mathrm{End}((ZX)_\infty) & \subset & \mathrm{End}((ZXY)_\infty) \end{array}$$

<u>Remark</u> (i) いままでの議論では C の object が bimodule であることは本質的には用いていません。使っているのは C の tensor category としての情報と amenability です。したがって C を "abstract な" tensor category としても全てそのままうまくいきます。([HY] 参照)
(ii) Thm 1.17 の (i)〜(iv) は μ の ergodicity のみがあれば non-amenable な時でも証明できます。しかし (v) には amenability が本質的にきいています。

§2. grading がある場合

前節での話は category C が N-N bimodule からなる場合でした。しかし subfactor $N \subset M$ からは N-N, N-M, M-N, M-M bimodule のなす category $C_{N,N}$, $C_{N,M}$, $C_{M,N}$, $C_{M,M}$ が得られます。そして $C_{N,N}$ (or $C_{M,M}$) のみでは standard invariant の情報は完

全には含みません。したがって standard invariant の実現問題との関係から bicategory $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{N,N} \cup \mathcal{C}_{N,M} \cup \mathcal{C}_{M,N} \cup \mathcal{C}_{M,M}$ を AFD-bimodule で実現することが重要となります。

以下、次の設定で考えます。

N, M : II_1-factors（互いに inclusion の関係はなくてよい）

$\mathcal{C}_{N,N}, \mathcal{C}_{N,M}, \mathcal{C}_{M,N}, \mathcal{C}_{M,M}$: それぞれ finite index N-N, N-M, M-N, M-M bimodule のなす category

さらに前節同様、$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{N,N} \cup \mathcal{C}_{N,M} \cup \mathcal{C}_{M,N} \cup \mathcal{C}_{M,M}$ が relative tensor product, unitary equivalence, 既約分解、conjugation について閉じているとします。（ただし relative tensor product は定義される組み合わせの時のみ考える。） $\mathcal{C}_{N,N}, \mathcal{C}_{N,M}, \mathcal{C}_{M,N}, \mathcal{C}_{M,M}$ それぞれの既約な bimodule の unitary equivalence class 全体を $S_{N,N}, S_{N,M}, S_{M,N}, S_{M,M}$ と書き、それぞれが高々可算集合であることも仮定します。この "bicategory" $\mathcal{C}$ に対しても前節と同様に Frobenius dual, minimal trace, quantum dimension が定義されしかるべき性質を満たします。また $\mathbb{C}[S_{N,N}]$ は fusion algebra になります。

<u>Definition 2.1</u>　$\mathcal{C}$ が amenable であるとは $\mathbb{C}[S_{N,N}]$ が amenable であることとする。

<u>Remark</u>　extremal subfactor $N \subset M$ に対して、$N \subset M$ の graph が amenable になることと $\mathbb{C}[S_{N,N}]$ が amenable であることは同値。したがって上の定義は subfactor の amenability に一致している。

これより前節とほぼ同じ方法で $A_\infty(X)$ や X_∞ を作るのですがここで1つ注意をしておきます。$N \simeq M$ の同 automorphism を1つ固定することで bicategory $\mathcal{C}$ は N-N bimodule からなる (non-graded) tensor category $\mathcal{C}'$ に埋め込むことができます。したがってもし $\mathcal{C}'$ が前節の意味で amenable ならば $\mathcal{C}'$ を AFD-bimodule で実現できます。すると当然 $\mathcal{C}$ も実現されることになります。しかしいま我々は bicategory $\mathcal{C}$ の amenability を $\mathcal{C}_{N,N}$ の amenability で定義したので $\mathcal{C}$ が amenable でも $\mathcal{C}'$ が amenable になる保障はありません。よって §1 の結果をそのまま適用することはできません。

以下、$\mathbb{C}[S_{N,N}]$ は amenable であると仮定します。

すると $S_{N,N}$ 上の symmetric, ergodic probability measure μ が $\mathrm{support}(\mu) = S_{N,N}$ となるようにとれます。

<u>Definition 2.2</u>

$X \in \mathrm{Object}(C_{N,A})$ $(A = N \text{ or } M)$ に対し

$$A_0(X) \equiv \mathrm{End}(X)$$

$$A_n(X) \equiv \bigoplus_{x,y \in S_{N,N}^n} \mathrm{Hom}(y_n \cdots y_1 X, x_n \cdots x_1 X) \otimes_x R_y$$

と定める。$A_n^s(X)$ $(s \in S_{N,A})$ も Def 1.9 と同様に定める。

<u>Remark</u> §1 と異なり $X \in \mathrm{Object}(C_{M,A})$ に対しては $A_n(X)$ を考えない。

<u>Lemma 2.3</u> (i) $A_n^s(X) \simeq R$ (ii) $A_n(X) \simeq \bigoplus_{s \in S_{N,A}} A_n^s(X)$

<u>Definition 2.4</u> $X \in \mathrm{Object}(C_{N,A})$ $Y \in \mathrm{Object}(C_{A,B})$ $(A, B \in \{N, M\})$ に対し Def 1.11 と同様にして 埋め込み

$$A_n(X) \hookrightarrow A_{n+1}(X) \quad , \quad A_n(X) \hookrightarrow A_n(XY)$$

を定める。

<u>記号</u> $S_{N,N}$ 上の probability measure ν と $S_{N,A}$ 上の

probability measure ν' に対し

$$\nu * \nu'(u) \equiv \sum_{\substack{s \in S_{N,N} \\ t \in S_{N,A}}} \nu(s)\nu'(t) N_{s,t}^{u} \frac{d(u)}{d(s)d(t)}$$

$(u \in S_{N,A})$ で定める。

Definition 2.5　$X \in \mathrm{Object}(C_{N,A})$ に対し

$$\tau_X(I_{A_n^s(X)}) = \mu^n * \delta_X(s) \quad (s \in S_{N,A})$$

で $A_n(X)$ 上の tracial state τ_X を定める。

Lemma 2.6　Def 2.4 の埋め込みと Def 2.5 の trace は compatible

$X \in \mathrm{Object}(C_{N,A})$ に対し $\bigcup_n A_n(X)$ の τ_X によるGNS-表現の weak closure を $A_\infty(X)$ とおく。

Definition 2.7　$f \in \ell^\infty(S_{N,A})$ が μ-harmonic とは

$$f(s) = \sum_{t \in S_{N,A}} \mu * \delta_s(t) f(t) \qquad {}^\forall s \in S_{N,A}$$

を満たすこととする。

Lemma 2.8　$X \in \mathrm{Object}(C_{N,A})$ に対し Lem 1.14 と同様に $Z(A_\infty(X))$ の元と μ-harmonic function が 1対1

に対応する。

μ の ergodicity と Lem 2.8 から $A_\infty(X)$ ($X \in \mathrm{Object}(C_{N,M})$) が factor であるといえそうですが それは一般に non-amenable な時は まちがいです。 μ の ergodicity とは $\mathbb{C}[S_{N,N}]$ におけるものなので X が $C_{N,N}$ に入っている時は $A_\infty(X)$ は factor になりますが $C_{N,M}$ に入っている時はなんとも言えません。 このことは subfactor でいうと 一方の graph が ergodic の時、他方も ergodic か？という問題に対応し これは U. Haagerup により反例が作られています。 しかし subfactor の場合、さらに amenability を仮定すると 一方の ergodicity が他方の ergodicity を意味することが Popa により示されています。([P1]) 我々の場合でも amenability のおかげで $A_\infty(X)$ ($X \in \mathrm{Object}(C_{N,M})$) は factor になります。 それは次のようにしていえます。

まず §1 より $\quad A_\infty' \cap A_\infty(X\bar{X}) = \mathrm{End}(X\bar{X})$

($\because$ $X\bar{X} \in \mathrm{Object}(C_{N,N})$ より §1 が使える。)

このことと

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \subset & A_\infty \\ \cap & & \cap \\ A_0(X) & \subset & A_\infty(X) \\ \cap & & \cap \\ A_0(X\bar{X}) & \subset & A_\infty(X\bar{X}) \end{array}$$

が commuting square をなすことより

$$A_\infty' \cap A_\infty(X) = \mathrm{End}(X)$$

となります。とくに X が既約のときは

$Z(A_\infty) \subset A_\infty' \cap A_\infty(X) = \mathrm{End}(X) = \mathbb{C}$

により $A_\infty(X)$ は factor となります。ここで Lem2.8 より ある $X \in \mathrm{Object}(C_{N,M})$ に対し $A_\infty(X)$ が factor なら $\forall Y \in \mathrm{Object}(C_{N,M})$ に対し $A_\infty(Y)$ も factor となります。

この論法（つまり $C_{N,N}$ に対し §1 の結果を適用し あとは commuting square を利用する方法）により

$$A_\infty(X)' \cap A_\infty(XY) = \mathrm{End}(Y)$$

$$(\, X \in \mathrm{Object}(C_{N,A}) \quad Y \in \mathrm{Object}(C_{A,B})\,)$$

も証明されます。これを用いれば C の実現が §1 と同様にしてできます。（くわしくは [H] 参照） また、[P2] の結果とこの結果をあわせれば amenable standard lattice の AFD II_1-subfactor による実現もできます。

References

[HI] F. Hiai and M. Izumi, Amenability and strong amenability for fusion algebras with applications to subfactor theory, Internat. J. Math. 9 (1998), 669–722

[HY] T. Hayashi and S. Yamagami, Amenable tensor categories and their realizations as AFD bimodules, preprint

[H] T. Hayashi, In preparation.

[P1] S. Popa, Classification of amenable subfactors of type II, Acta Math., 172(1994), 163–255

[P2] S. Popa, An axiomatization of the lattice of higher relative commutants of a subfactor, Invent. Math., 120 (1995), 427–445